

열 및 통계 물리 1 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2002. 12. 10. 화요일 10:00 - 11:50

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

필요시 다음을 이용할 것

- 반지름 R 인 N 차원 구의 부피

$$V_N(R) = \frac{2\pi^{N/2}}{N \left(\frac{N}{2} - 1\right)!} R^N$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$
- $\int_{aq^2+bp^2 \leq E} dq dp = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{s^2+t^2 \leq E} ds dt$

1. [30점] 단원자 이상기체를 내용물로 하는 어떤 가상의 기관이 다음 3가지 과정으로 이루어진 순환을 하고 있다.

	process	initial state	final state	heat
ab	등압 팽창	(V_1, p_1)	(V_2, p_1)	Q_{ab}
bc	등적 압력 감소	(V_2, p_1)	(V_2, p_2)	Q_{bc}
ca	단열 압축	(V_2, p_2)	(V_1, p_1)	0

여기서 열(heat)은 기관이 받는 열이다. 즉 $Q > 0$ 이면 기관으로 열이 들어오는 것이고 $Q < 0$ 이면 열이 밖으로 나가는 것이다. (답은 p_1, V_1, V_2 로 나타낼 것)

- (a) 위 기관의 사이클을 p - V 그래프로 나타내고 이 기관이 사이클 당 한 순수 일 W 를 그래프에 빗금(hatching)으로 표시하여라.
- (b) Q_{ab} 와 Q_{bc} 를 구하라.
- (c) 이 기관의 효율 $\eta = \frac{W}{Q_{ab}}$ 를 구하라.

2. [20점]

- (a) 온도 T 인 열 저장고와 평형 상태에 있는 닫힌 계가 x 라는 상태에 있을 확률 p_x 는

$$p_x = \frac{1}{Z} e^{-E_x/T} \tag{1}$$

로 주어짐을 (저장고 + 닫힌계)가 평형 상태의 고립계라는 사실에서 유도하라. 여기서 $Z = \sum_x e^{-E_x/T}$ 이다.

- (b) 온도 T 인 열 저장고와 평형 상태에 있는 계의 평균에너지 U 는 일정하다 (계의 에너지 E_x 는 요동할 수 있음). 이 사실과 x 라는 상태에 있을 확률 p_x 의 모든 상태에 대한 합이 1로 상수라는 조건아래서 엔트로피

$$S = - \sum_x p_x \ln p_x$$

를 최대화하는 확률 분포가 식 (1)의 형태임을 보여라.

3. [30점] 작은 바른틀 앙상블 (Micro Canonical Ensemble)을 이용하여 서로 구별할 수 있는 N 개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계의 열통계적 성질을 살펴보려고 한다. 이 경우 해밀토니안은

$$\begin{aligned} H(\{q_i, p_i\}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 $k = m\omega^2$ 는 용수철 상수이다.

- (a) 계의 에너지가 $E \sim E + \Delta E$ 에 있는 상태수 $\Omega(\omega, E, N)$ 가

$$\Omega(\omega, E, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^N \left(\frac{N\Delta E}{E} \right)$$

임을 보여라.

- (b) 이 계의 엔트로피 $S(\omega, E, N)$ 가

$$S(\omega, E, N) = N \left[1 + \ln \left(\frac{E}{N\hbar\omega} \right) \right]$$

임을 보여라.

- (c) 작은 바른틀 앙상블의 온도 정의를 적고 이를 이용하여

$$E = NT$$

임을 보여라.

4. [20점] 원자가 흡착될 수 있는, 면적 A 인 결정체의 표면에서 흡착된 원자의 운동은 2차원 이상기체 운동으로 기술된다고 가정하자. 흡착에너지를 ϵ_a 이라고 할 때, 표면계의 Hamiltonian은 $\vec{q}_i \in A$ 인 경우

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{p_{i,\alpha}^2}{2m} - \epsilon_a \right)$$

이고 $\vec{q}_i \notin A$ 인 경우 ∞ 이다.

- (a) 표면의 온도가 T 이고 표면에 N 개의 흡착 원자가 있을 때, 바른틀 앙상블을 이용하여 자유 에너지 $F(A, N, T)$ 를 구하라.
- (b) 압력이 $p = - \left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)_T$ 로 주어짐을 이용하여 이 계의 상태 방정식을 구하라.