

열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2002. 6. 18. 화요일 13:30 - 15:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

필요시 다음공식을 이용하라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi/a}$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax) dx = 1/a$$

1. [30점] 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B - \frac{\sqrt{3}}{2} |\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B$$

로 기술되는 pure 상태에 있다.

(a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 행렬 ρ_{AB} 을 $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ 를 기저로하여 나타내어라. 여기서 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 는 $|\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B$ 를 나타낸다.

(b) A계의 밀도 행렬 $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ 를 구하라. 또, ρ_A 와 ρ_A^2 의 trace가 모두 1임을 보이고 그 이유를 말하라.

(c) 일반적으로 연산자 O 의 기대값 $\langle O \rangle$ 는

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(O\rho)$$

로 주어진다. 스핀 A 의 x -성분, s_x^A 의 기대값을 구하라. (참고: s_x^A 의 $\{|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A\}$, 기저 표현은 $\frac{\hbar}{2}\sigma_x$ 로 표현된다. 여기서 σ 는 파울리 행렬이다.)

2. [40점] 에너지 $\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \epsilon$ 를 갖는 2개의 state로 이루어진 계가 있다. 이 계에 3개의 Boson입자가 놓여있고 온도 T 인 저장실과 평형상태를 이루고 있다.

(a) [10점] 세 개의 Boson을 두 개의 states에 넣는 방법은 모두 몇가지 인가? 또 각각의 경우, 에너지를 적어라.

(b) [10점] 온도가 $T = \frac{1}{\ln 2} \epsilon$ 인 경우 분배 함수 Z 를 구하고 각 state의 평균 입자 갯수 \bar{n}_1, \bar{n}_2 를 구하여라. (Z, \bar{n}_1, \bar{n}_2 의 답은 모두 숫자로 적을 것)

(c) [10점] 입자의 갯수가 많은 Boson계의 경우, 위의 바른틀 앙상블 방법보다 큰 바른틀 앙상블을 사용하는 것이 더 편리하다. 화학 퍼텐셜을 μ 라할 때, state r 의 Boson입자의 평균 갯수는 $n_r = 1/[e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} - 1]$ 로 주어짐을 보여라.

(d) [10점] 주어진 계의 입자의 갯수가 N 으로 고정된 경우, (c)의 화학 퍼텐셜 μ 는 어떻게 정하여 지는가?

3. [30점] N 개의 단원자 분자로 이루어진 이상기체가 지구 중력장위에 놓여있다. 이 경우 해밀토니안은 $z_i > 0$ 인 경우

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^3 \frac{p_{i,\alpha}^2}{2m} + mgz_i \right)$$

이고 $z_i \leq 0$ 인 경우 ∞ 이다. 여기서 m 은 원자의 질량이고 g 는 중력 가속도이다.

(a) 고전적 분배함수 $Z_N(T)$ 를 구하여라.

(b) 입자의 운동량이 $[\vec{p}, \vec{p} + d^3p]$ 사이에 있고 높이가 $[z, z + dz]$ 사이에 있는 입자수를 $N\rho(\vec{p}, z) d^3p dz$ 라 할 때, $\rho(\vec{p}, z)$ 를 구하라. 또, 입자의 높이가 $[z, z + dz]$ 사이에 있는 입자수를 $N\rho(z) dz$ 라 할 때,

$$\rho(z) = \rho(0)e^{-mgz/T}$$

임을 보이고 평균 높이를 구하여라.

(c) 이 계의 화학적 퍼텐셜 μ 를 구하라.