열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채 　　　　　　　　　　 시행일자: 2002. 4. 25. 금요일 14:00 – 15:50

자연과학 대학 　　　　　 학과 　　　 학년, 　 학번: 　　　　　　　　 성명:

필요시 다음을 이용할 것

- 반지름 R인 N차원 구의 표면적
$$A_N(R) = \frac{2\pi^{N/2}}{(\frac{N}{2}-1)!} R^{N-1}$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\pi/a}$$
- $$\int_{aq^2+bp^2=E} dq\, dp = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{s^2+t^2=E} ds\, dt$$

1. [40점] 작은 바른틀 앙상블 (Micro Canonical Ensemble)을 이용하여 서로 구별할 수 있는 N개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계의 열통계적 성질을 살펴보려고 한다. 이 경우 해밀토니안은

$$\begin{aligned} H(\{q_i, p_i\}) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \end{aligned} \quad (1)$$

로 주어진다. 여기서 $k = m\omega^2$는 용수철 상수이다.

(a) 계의 에너지가 $E \sim E + \Delta E$에 있는 상태수 $\Omega(\omega, E, N)$가

$$\Omega(\omega, E, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^N \left(\frac{N\Delta E}{2E}\right) \quad (2)$$

임을 보여라.

(b) 이 계의 엔트로피 $S(\omega, E, N)$가

$$S(\omega, E, N) = N\left[1 + \ln\left(\frac{E}{N\hbar\omega}\right)\right] \quad (3)$$

임을 보여라.

(c) 작은 바른틀 앙상블의 온도 정의를 적고 이를 이용하여

$$E = NT \quad (4)$$

임을 보여라.

(d) 엔트로피를 고정하고 용수철 상수, 또는 진동수를 변화시킬때의 에너지의 변화로 α를

$$\alpha = -\left(\frac{\partial E}{\partial \omega}\right)_S$$

로 정의할 때,

$$\alpha\omega = NT$$

임을 보여라.

2. [30점] 식(1)로 주어지는 N개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도 T인 열원과 평형상태에 있다.

(a) 분배함수 $Z_N(T)$를 구하라.

(b) 평균 에너지 $\langle E\rangle$와 비열 $C(T) = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}$를 구하라.

(c) Helmholtz 자유에너지 $F = -T\log Z$를 구하고 $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$로 부터 엔트로피를 구하라.

3. [30점] N개의 원자로 이루어진 상자성 물질의 자기에너지 해밀토니안은

$$\begin{aligned} H(\{\vec{\mu}_i\}) &= -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mu}_i \cdot \vec{B} \\ &= -\mu_0 B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z \end{aligned}$$

로 나타내어진다. 여기서 μ_0는 원자 하나의 자기 모멘트 크기이고 자기장의 방향을 z-축 방향으로 잡았다. 이 계가 온도 T인 열원과 평형상태에 있을 때,

(a) 고전적 분배함수를 구하여라. (힌트: 고전적 계로 생각하면 $\vec{\mu}_i$의 방향은 모든 입체각 (θ_i, ϕ_i)이 가능하고 σ_i^z는 단위 벡터의 z-성분, 즉 $\cos\theta_i$로 주어진다.)

(b) 자기 모멘트를 이루는 입자의 스핀이 $s = 1/2$이고 각운동량이 $l = 0$인 경우, 분배함수를 양자 역학적으로 구하여라. (힌트: i번 입자의 전체 각운동량이 j일 때, σ_i^z는 $2j+1$ 가지의 다른 값을 갖을 수 있다. $s = 1/2, l = 0$인 경우는 $j = 1/2$로 두 가지, 즉 $\sigma_i^z = \pm 1$이 가능하다.)